Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Christoph Brackenhofer — Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 3
Abgabe: 15.11.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei p eine Primzahl.

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \\ & n+p^3\mathbb{Z} & \mapsto & n+p^2\mathbb{Z} \end{array}$$

ein wohldefinierter Gruppenepimorphismus ist.

(b) Bestimme den Index der Untergruppe $\mathrm{Ker}(F)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei G eine abelsche Gruppe und zwei Elemente g und h mit g der Ordnung n und h der Ordnung m. Gib eine obere Schranke für die Ordnung des Elementen $g+h$ und folgere, dass $g+h$ auch endliche Ordnung besitzt.
Ist die angegebene obere Schranke optimal? Begründe die Antwort.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Betrachte die Gruppe $\mathcal{Q}_8$ mit acht Elementen $\{1,-1,\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k},-\mathtt{i},-\mathtt{j},-\mathtt{k}\}$, deren Gruppengesetz nach der folgenden Tabelle gegeben wird.

$\cdot$	1	−1	i	j	k	−i	−j	−k
1	1	−1	i	j	k	−i	−j	−k
−1	−1	1	−i	−j	−k	i	j	k
i	i	−i	−1	k	−j	1	−k	j
j	j	−j	−k	−1	i	k	1	−i
k	k	−k	j	−i	−1	−j	i	1
−i	−i	i	1	−k	j	−1	k	−j
−j	−j	j	k	1	−i	−k	−1	i
−k	−k	k	−j	i	1	j	−i	−1

1. Zeige, dass $\mathcal{Q}_8$ von $\{i,j\}$ erzeugt wird. Ist $\mathcal{Q}_8$ abelsch?
2. Bestimme die Ordnung jedes Elements aus $\mathcal{Q}_8$.
3. Beschreibe explizit alle Untergruppen. Ist jede Untergruppe ein Normalteiler?

Aufgabe 4 (6 Punkte). Sei H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G sowie ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$. Falls $|H|$ und $|N|$ teilerfremd sind, so gilt

$$|\langle H\cup N\rangle| = |N||H|,$$

wobei $\langle H\cup N\rangle$ die von N und H erzeugte Untergruppe ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.